2022

الرياضيات التطبيقية

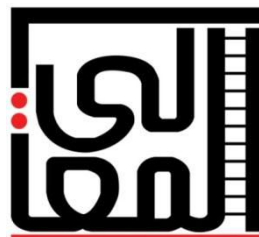
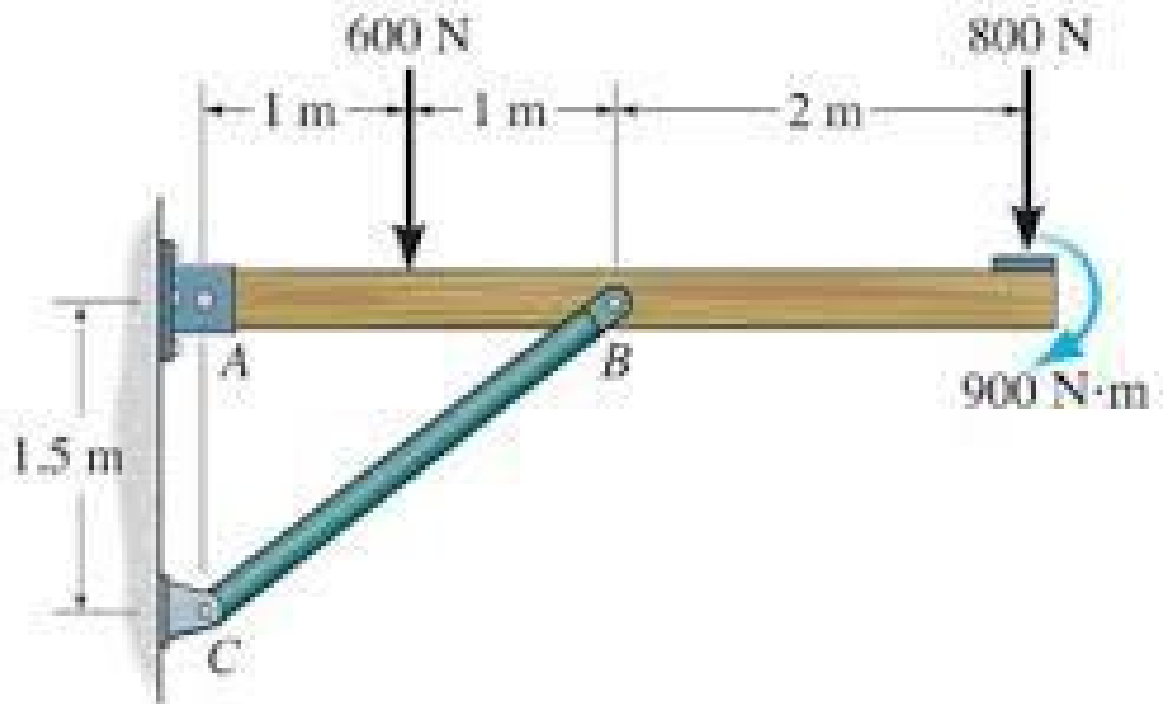
للصف الثاني الثانوي العلمي

إعداد الأستاذ

السيد عبد الكريم عرابي

موجه رياضيات

الاستاتيكا

600 N
800 N
1 m
1 m
2 m
A
B
C
1.5 m
900 N·m

المعالى
دايما فى العلالى
٠١٢٢٨٤٨٤٥٦٧
٠١١١١٩٥٤٨٠٠

القـــوى

القـــوة القـوة هى مؤثر خارجى يعمل على تغيير حالة الجسم من السكون أو الحركة المنتظمة

أنواع القوى

① قوة الشـد (ش) تظهر فى الخيط أو الحبل عند تعليق جسم فيه
② قـوة الوزن (و) تظهر عند إلقاء جسم فإنه يـسقط على الارض
③ قـوة الضغط (ض) تـظهر عند وضع جسم على سطح
④ قـوة رد الفعل (ر) تظهر عند تلامس جسمين ببعض

متجه القـوة

القـوة كمية متجهة تحتاج لتعريفها مقدارها و اتجاهها

$\vec{ق} = (س ، ص)$ ⟷ صورة إحداثية

$\vec{ق} = س \vec{س} + ص \vec{ص}$ ⟷ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين

$\vec{ق} = (\| \vec{ق} \| ، \theta)$ ⟷ صورة قطبية

تعيين القوة

يتوقف تأثير القـوة على :-

(i) مقدارها (ii) اتجاهها (iii) نقطة تأثيرها (خط عملها)

وحدات القوة

(i) وحدات مطلقة نيوتن - داين

(ii) وحدات تثاقلية ث.طن - ث.كجم - ث.جم

المحصلة هى قـوة بديلة تحدث نفس التأثير الذى تحدثه قوتين أو أكثر

محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

١ إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة هندسيا

$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2}$

إذا مثلت قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراً واتجاهاً بضلعى متوازى أضلاع يبدأ من النقطة . فإن محصلتهما تمثل مقداراً واتجاهاً بقطر متوازى الأضلاع الذى يبدأ بهذه النقطة

٢ إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليا

ق١ ، ق٢ ، ح مقادير القوى

ى قياس الزاوية بين القوتين

هـ قياس زاوية ميل المحصلة على ق١

مقدار المحصلة : $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى$

اتجاه المحصلة : $\text{ظا } هـ = \frac{ق_2 \text{ جا } ى}{ق_2 \text{ جتا } ى + ق_1}$

مثال ١ قوتان مقدارهما ١٠ ، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٦٠° أوجد مقدار واتجاه محصلتهما .

الحل

ق١	ق٢	ح	ى	هـ
١٠	٦	??	٦٠°	??

$ح = \sqrt{(10)^2 + (6)^2 + 2 \times 10 \times 6 \text{ جتا } 60°} = 14$ نيوتن

$\text{ظا } هـ = \frac{6 \text{ جا } 60°}{6 \text{ جتا } 60° + 10} \Leftarrow هـ = 21° \; 47' \; 12''$

مثال ٢

قوتان مقدارهما ٤ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة فإذا كان مقدار محصلتهما $٤\sqrt{٣}$ نيوتن أوجد قياس الزاوية بينهما .

الحل

$ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتاى

$(٤\sqrt{٣})^٢ = ١٦ + ٦٤ + ٢ × ٤ × ٨$ جتاى

∴ $٤٨ = ٨٠ + ٦٤$ جتاى

∴ ٦٤ جتاى $= -٣٢$ ⟸ جتاى $= \frac{-٣٢}{٦٤}$ ⟸ $ى = ١٢٠°$

$ق_١$	$ق_٢$	ح	ى	هـ
٤	٨	$٤\sqrt{٣}$	؟؟	

مثال ٣

قوتان مقدارهما ٨ ، ق ث.جم تؤثران فى نقطة وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° إذا كانت محصلتهما $ق\sqrt{٣}$ ث.جم أوجد مقدار ق

الحل

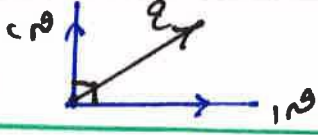
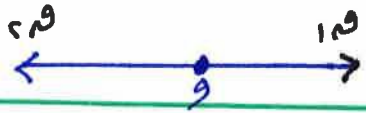
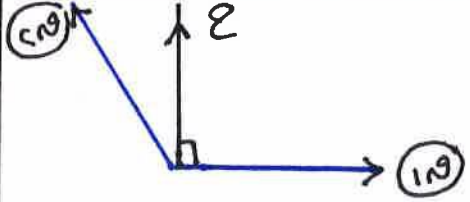
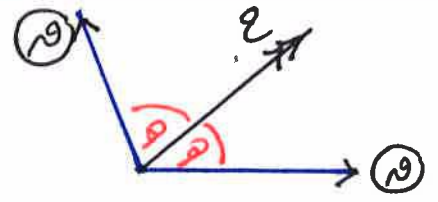
$(ق\sqrt{٣})^٢ = ٦٤ + ق^٢ + ٢ × ٨ × ق$ جتا ١٢٠°

$٣ق^٢ = ٦٤ + ق^٢ - ٨ق$

$٣ق^٢ - ٦٤ - ق^٢ + ٨ق = ٠$

$٢ق^٢ + ٨ق - ٦٤ = ٠$

∴ ق = ٤ ث كجم ، ق = -٨ مرفوض

$ق_١$	$ق_٢$	ح	ى	هـ
٨	ق	$ق\sqrt{٣}$	١٢٠°	

مثال ٤

قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى $٤\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد مقدار ق

الحل

حالات خاصة

القوتان في نفس الاتجاه	القوتان في اتجاهين متضادين	القوتان متعامدتان
$ق_1$ ، $ق_2$ ، و	$ق_1$ ، $ق_2$ ، و	$ق_1$ ، $ق_2$ ، ح
ح = $ق_1$ + $ق_2$ المحصلة لها قيمة عظمى	ح = $\vert ق_1 - ق_2 \vert$ المحصلة لها قيمة صغرى	$ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2$
ى = صفر	ى = ١٨٠°	ى = ٩٠°
اتجاه المحصلة في نفس اتجاه القوتين	المحصلة في اتجاه القوة الأكبر	ظا هـ = $\frac{ق_2}{ق_1}$
القوتان متساويتان	**المحصلة عمودية على القوة الأولى**	**القوتان متساويتان ومتضادتين**
ق ، ق ، ح ، هـ ، هـ	$ق_1$ ، $ق_2$ ، ح	ق ، ق ، و
ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{2}$ ح تنصف الزاوية بين القوتين	$ح^2 = ق_2^2 - ق_1^2$ $ق_1$ + $ق_2$ جتا ى = صفر جتا ى = $\frac{ق_1}{ق_2}$ ح ⊥ القوة الصغرى دائماً	ح = صفر ى = ١٨٠°

ملحوظة

$$|ق_1 - ق_2| \leq ح \leq ق_1 + ق_2$$

يعني : $ح \in [\,|ق_1 - ق_2| \,،\, ق_1 + ق_2\,]$

مثال ٥
قوتان متعامدتان مقدارهما ٨ ، ١٥ ث كجم تؤثران في نقطة مادية أوجد محصلتهما

الحل

مثال ٦
قوتان تؤثران في نقطة مادية فإذا كانت أكبر قيمة للمحصلة = ١٧ ث.كجم وأصغر قيمة للمحصلة = ٧ ث كجم أوجد مقدار كل من القوتين

الحل

مثال ٧
قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى أوجد ق ومقدار المحصلة .

الحل

(١) إذا كانت $\overline{ق_١} = ٢\overline{س} + ٣\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = \overline{س} + \overline{ص}$ حيث ق١ ، ق٢ بالنيوتن فإن مقدار محصلتهما ----

(أ) $\sqrt{٢٦}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٣}$ (د) ٥

(٢) قوتان مقدارهما ٣ ، ٥ نيوتن ، قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما ... نيوتن

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) $\sqrt{١٩}$ (د) $\sqrt{٣٤}$

(٣) قوتان مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ فإن محصلتهما = ... نيوتن

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

(٤) قوتان متساويتان في المقدار وقياس الزاوية بينهما $\frac{٢\pi}{٣}$ ومقدار محصلتهما ٣ نيوتن فإن مقدار كل منهما نيوتن

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣ (د) $٣\sqrt{٣}$

(٥) قوتان متساويتان متلاقيتان في نقطة مقدار كل منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوي

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٦) قوتان مقدارهما ٣ ، ق نيوتن ، قياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن ق = نيوتن

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) $٢\sqrt{٣}$

(٧) إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران في نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بينهما

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

(٨) قوتان مقدارهما ق ، ٢ق نيوتن ومقدار محصلتهما ق فإن قياس الزاوية بينهما ..

(أ) صفر (ب) ٩٠° (جـ) ١٥٠° (د) ١٨٠°

(٩) إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى يساوى

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

(١٠) إذا كانت ح محصلة القوتين ق١ ، ق٢ وكانت ح ⊥ ق١ وكانت ح = ½ ق٢ فإن قياس الزاوية بين القوتين ق١ ، ق٢ هو ..

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

---

(١١) قوتان متساويتان في المقدار ومقدار كل منهما ق نيوتن فإذا كان مقدار محصلتهما ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

---

(١٢) قوتان متلاقيتان في نقطة مقدارهما ق١ ، ق٢ حيث ٠ ≤ ق١ ≤ ١٣ ، ٨ ≤ ق٢ ≤ ١٧ وقياس الزاوية بينهما ١٨٠° ومقدار محصلتهما ح فإن ..

(أ) ٣ ≤ ح ≤ ٤ (ب) ٠ ≤ ح ≤ ٤

(جـ) ٠ ≤ ح ≤ ١٧ (د) ٥ ≤ ح ≤ ١٧

---

(١٣) قوتان متعامدتان مقدارهما ٢ ق − ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران في نقطة مادية مقدار محصلتهما يساوى ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن فإن ق =

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

(١٤) أثرت قوتان في نقطة مادية فإذا كان مقدار القوة الأولى ١٥ ث كجم وتؤثر في اتجاه الشرق ومقدار الثانية ١٨ ث كجم وتؤثر في اتجاه ٣٠° غرب الشمال عين المحصلة

---

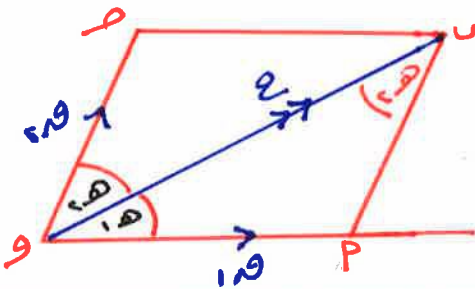
(١٥) قوتان مقدارهما ق١ ، ق٢ نيوتن ومحصلتهما ح نيوتن حيث ح ∈ [٦ ، ١٠] ، ق١ > ق٢ أوجد مقدار ق١ ، ق٢

---

(١٦) قوتان مقدارهما ١٦ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت محصلتهما تميل على القوة الأولى بزاوية ٣٠° أوجد ق ومقدار المحصلة

تحليل القوة إلى مركبتين

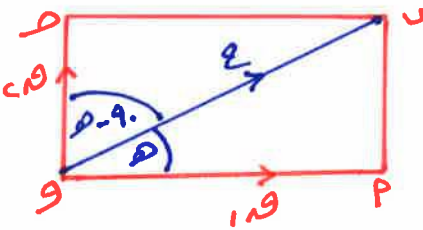
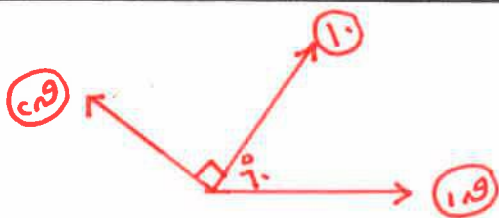
سبق أن أوجدنا محصلة قوتين $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ متلاقيتين فى نقطة مادية باستخدام قاعدة متوازى الأضلاع . والعكس اذا كان لدينا المحصلة $\overline{ح}$ والمطلوب تحليلها

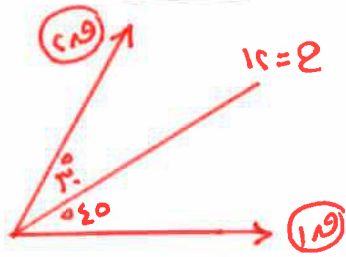
تحليل قوة معلومة فى اتجاهين معلومين

$$\frac{ق_1}{جا هـ_2} = \frac{ق_2}{جا هـ_1} = \frac{ح}{جا(هـ_1 + هـ_2)}$$

تحليل قوة معلومة فى اتجاهين متعامدين

$$\frac{ق_1}{جا(٩٠ - هـ)} = \frac{ق_2}{جا هـ} = \frac{ح}{جا ٩٠}$$

∴ $ق_1 = ح \times جتا هـ$ ، $ق_2 = ح جا هـ$

---

(١) فى الشكل المقابل..

بتحليل القوة ١٠ نيوتن إلى مركبتين $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$

فإن : $ق_2 =$ .... نيوتن

(أ) $٥\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ (جـ) $١٠\sqrt{٣}$ (د) ٢٠

الحل

(٢) في الشكل المقابل.. ق٢ =

(أ) ١٢ جتا ٧٥° (ب) ١٢ جتا ٤٥°

(ج) ٦ قا ٤٥° (د) ٦ قتا ٧٥°

الحل

(٣) قوة مقدارها ٥$\sqrt{3}$ نيوتن تؤثر في اتجاه ٣٠° شرق الشمال حللت الى مركبتين متعامدتين فإن مقدار المركبة في اتجاه الشرق = نيوتن

(أ) ٥ (ب) ٧$\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{٥\sqrt{3}}{٢}$ (د) ١٥

الحل

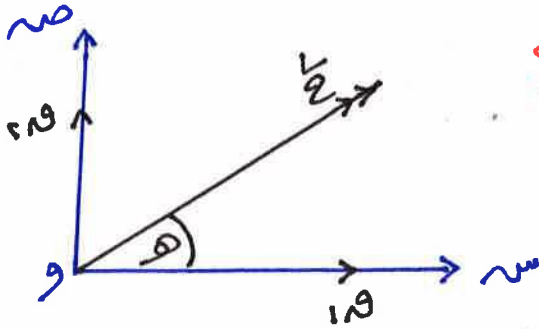
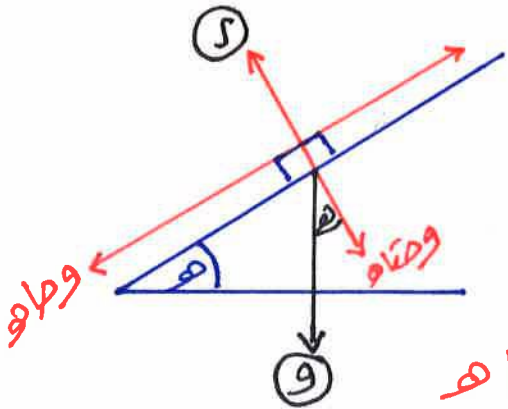
(٤) قوة مقدارها ١٠$\sqrt{2}$ ث.جم تعمل في اتجاه الجنوب الشرقي تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإذا كان مقدار مركبة القوة في اتجاه الجنوب = ث.جم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٠$\sqrt{2}$ (د) ٥$\sqrt{2}$

الحل

ملاحظات

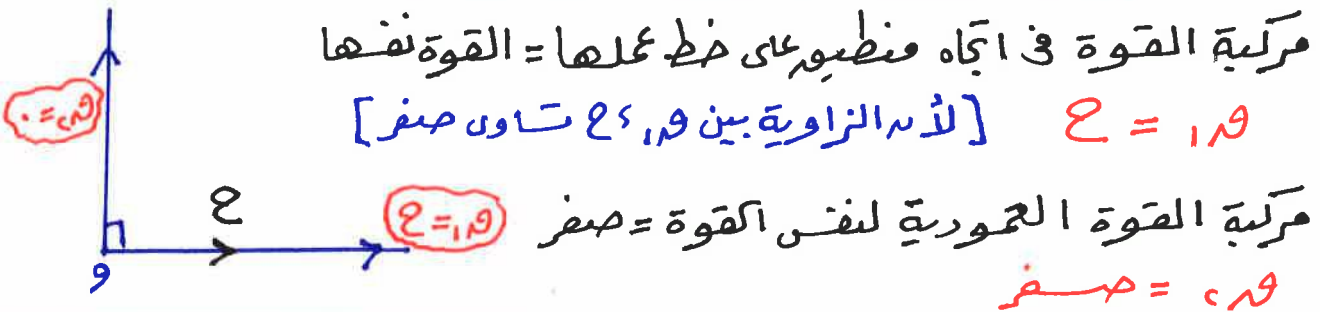
(١) تحليل قوة فى اتجاهى محورى الإحداثيات

ق١ = ح جتا هـ ، ق٢ = ح جا هـ

(٢) تحليل وزن الجسم على مستوى مائل أملس

اذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها (هـ) فإنه يمكن تحليل الوزن إلى مركبتين :-

① مركبة الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى = و جا هـ

② مركبة الوزن فى اتجاه عمودى على المستوى = و جتا هـ

(٣) مركبة القوة فى اتجاه منطبق على خط عملها = القوة نفسها

ق١ = ح [لأن الزاوية بين ق١ ، ح تساوى صفر]

مركبة القوة العمودية لنفس القوة = صفر

ق٢ = صفر

مثال ٥: إذا وضع جسم وزنه ٤٢ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها ٦٠° فإن مركبة الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى = ---- نيوتن

(أ) ٢١ (ب) $٢١\sqrt{٣}$ (جـ) ٤٢ (د) $٣\sqrt{٢١}$

مثال ٦

قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تساوى .... نيوتن

(أ) صفر (ب) ٣ (ج) ٣$\sqrt{2}$ (د) ٦

مثال ٧

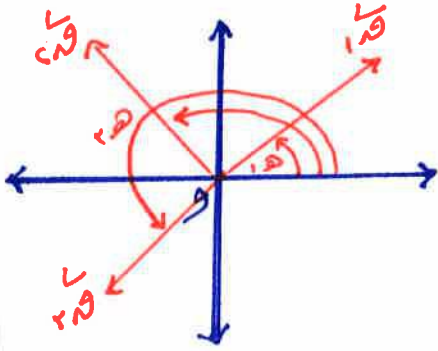
قوة مقدارها ٤$\sqrt{2}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن

(أ) صفر (ب) ٤$\sqrt{2}$ (ج) ٤ (د) ٦

مثال ٨

مستوى مائل طوله ١٣٠ سم وارتفاعه ٥٠ سم وضع عليه جسم جاسئ وزنه ٣٩٠ ث.جم أوجد مركبتى الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه

الحل

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة

إذا كانت : $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ ، $\overline{ق_3}$ ، ... مجموعة من القوى المتلاقية

و : $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$ ، ... هى الزوايا القطبية لها

فإن : مجموع مركبات القوى فى اتجاه محور السينات

$س = ق_1 جتا هـ_1 + ق_2 جتا هـ_2 + ق_3 جتا هـ_3 + ...$

مجموع مركبات القوى فى اتجاه محور الصادات

$ص = ق_1 جا هـ_1 + ق_2 جا هـ_2 + ق_3 جا هـ_3 + ...$

$$\overline{ح} = (س ، ص)$$

مقدار المحصلة : $ح = \sqrt{س^2 + ص^2}$

اتجاه المحصلة : $ظا هـ = \frac{ص}{س}$

خد بالك

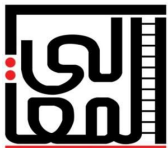
الزاوية القطبية هى الزاوية التى تصنعها القوة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

ملاحظات

①

الربع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
الإشارة	(+ ، +)	(− ، +)	(− ، −)	(+ ، −)
الزاوية	هـ حادة	١٨٠ − حادة	١٨٠ + حادة	٣٦٠ − حادة

② محصلة عدة قوى : $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ ، $\overline{ق_3}$ هى $\overline{ح} = \overline{ق_1} + \overline{ق_2} + \overline{ق_3}$

وإذا كانت $\overline{ح} = \overline{صفر}$ فإن مجموعة القوى تكون متزنة

مثال ١

إذا كانت: ق١ = ٢ سَ − ٢ صَ ، ق٢ = ٤ سَ − ٨ صَ ، محصلتهما ح = ٢أ سَ − ٣ب صَ فإن أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٣ $\frac{١}{٣}$ (ج) ٦ $\frac{١}{٣}$ (د) ١٢

الحل

مثال ٢

إذا كانت ق١ = ٣ سَ − ٢ صَ ، ق٢ = أ سَ − صَ ، ق٣ = ٤ سَ − ب صَ ومحصلتهم ح = ٦ سَ − ٤ صَ فإن (أ ، ب) = ---

(أ) (١ ، −١) (ب) (−١ ، ١) (ج) (−١ ، −١) (د) (١ ، ١)

الحل

مثال ٣

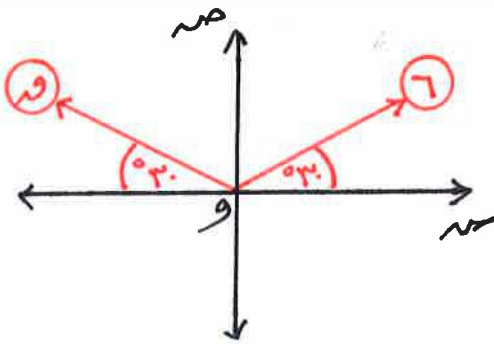
إذا كان ق١ = ٥ سَ ، ق٢ = ٧ سَ − ٥ صَ فإن ||ح|| = --- وحدة قوة

(أ) ١٢ (ب) ٥ (ج) ١٣ (د) √٣٧

الحل

مثال ٤

إذا كانت $\overline{ق_١} = ٥\overline{س} + ٣\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = أ\overline{س} + ٦\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣} = -١٤\overline{س} + ب\overline{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت $\overline{ح} = (١٠\sqrt{٢} ، \frac{٣}{٤}\pi)$

أوجد قيمتى أ ، ب

الحل

مثال ٥

فى الشكل المقابل..

اذا كانت محصلة القوى بوحدة النيوتن تؤثر فى محور ص فإن ق = ... نيوتن

ⓐ ٨ ⓑ ٦

ⓒ ١٤ ⓓ ٢

الحل

مثال ٦

أثرت القوى (٨ ، ٤ ، ١٠ ، ٦ $\sqrt{3}$) نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاه الشرق ، ٦٠° شمال الشرق ، ٦٠° شمال الغرب ، ٣٠° جنوب الغرب على الترتيب عين المحصلة

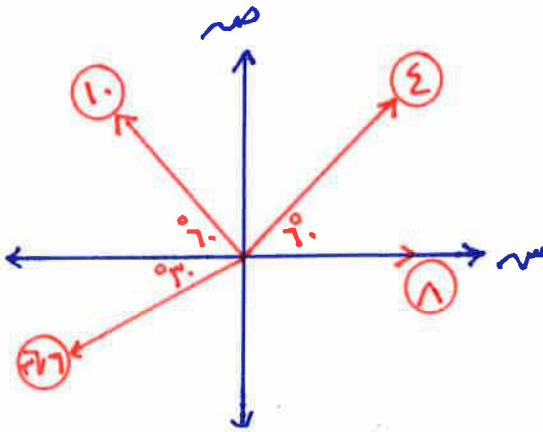
الحل

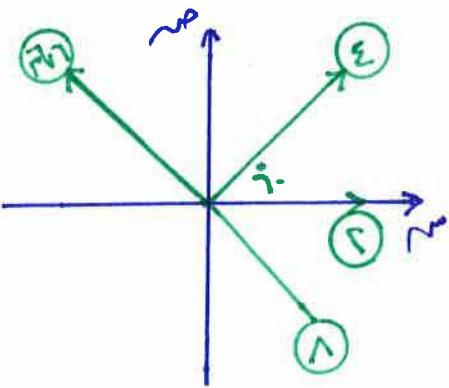
القوى	٨	٤	١٠	٦ $\sqrt{3}$
الزوايا				

س =

ص =

∴ ح = (−٤ ، ٤ $\sqrt{3}$) ربع ثانى

∴ ح =   طاهـ =   ∴ هـ =

مثال ٧

أربعة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها (٢ ، ٤ ، ٦ $\sqrt{3}$ ، ٨) نيوتن وكانت الزاوية بين القوة الاولى والثانية ٦٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° وبين الثالثة والرابعة ١٥٠° أوجد محصلة القوى مقداراً واتجاهاً

الحل

القوى	٢	٤	٦ $\sqrt{3}$	٨
الزوايا	٠	٦٠°	١٥٠°	٣٠٠°

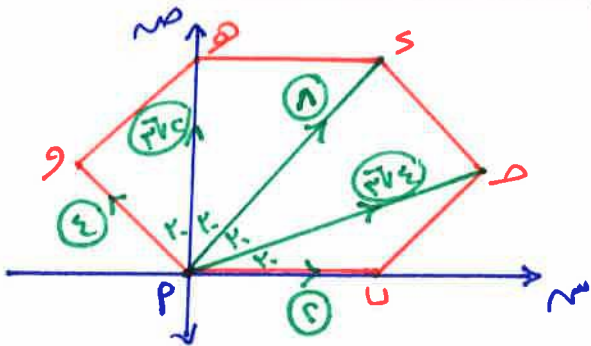
س =

ص =

∴ ح = (−١ ، $\sqrt{3}$) ربع ثانى

∴ ح =   طاهـ =   ∴ هـ =

مثال ٨

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوى ٢ ، ٤√٣ ، ٨ ، ٢√٣ ، ٤ ث جم فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب عين محصلة القوى

الحل

القوى	٢	٤√٣	٨	٢√٣	٤
الزوايا	صفر	٣٠	٦٠°	٩٠°	١٢٠°

س =

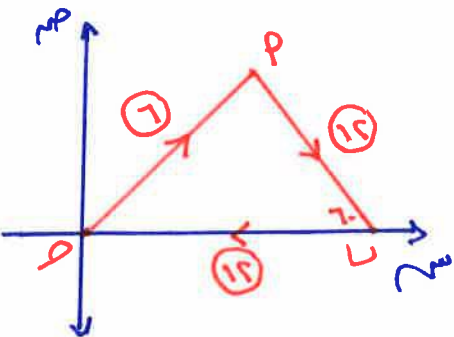
ص =

∴ ح = (١٠ ، ١٠√٣) ربع أول

∴ ح =   ظاهـ =   ∴ هـ =

مثال ٩

أ ب حـ △ متساوى الأضلاع تؤثر القوى ١٢ ، ١٢ ، ٦ نيوتن فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بحـ}$ ، $\overrightarrow{حـأ}$ على الترتيب عين محصلة القوى .

الحل

نختار نقطة (حـ) نقطة تلاقى القوى

القوى	٦	١٢	١٢
الزوايا	٦٠°	١٨٠°	٣٠٠°

س =

ص =

ح = (−٣ ، −٣√٣) ربع ثالث

ح =   ظاهـ =   ∴ هـ =

الرياضيات | الصف الثانى الثانوى

مثال ١٠ أ ب حـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ ب حـ بحيث ب هـ = ٥ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤√٢ ، ٩ ث جم فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{دأ}$ على الترتيب أوجد محصلة القوى .

الحل

القوى	٢	١٣	٩	-٤√٢
الزوايا	صفر	ى	٩٠°	٤٥°

س =

ص =

ح = (،   ) ربع

ح =

تمارين

① إذا أثرت القوى : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٤ س + ٥ ص ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = أ س - ٧ ص ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = ٣ س + ب ص فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن أ + ٢ ب = ...

(أ) -٥ (ب) ٥ (حـ) ٧ (د) -٣

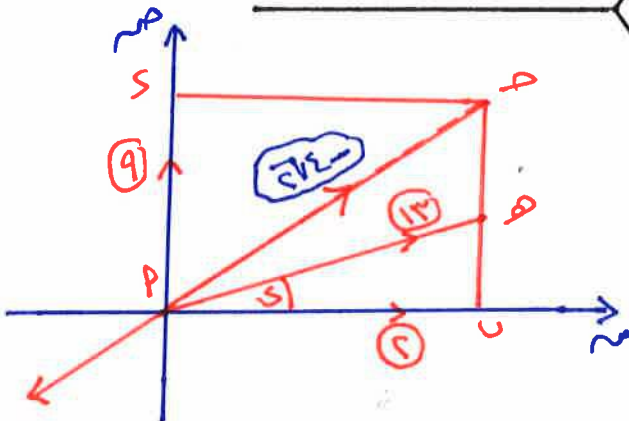
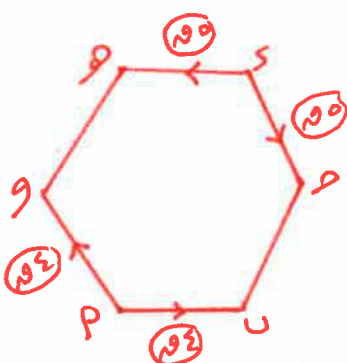
② فى الشكل المقابل..

أ ب حـ د هـ و شكل سداسى منتظم

فإن محصلة القوى تكون فى اتجاه ...

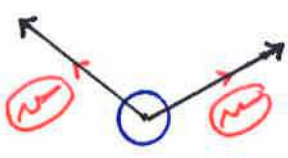
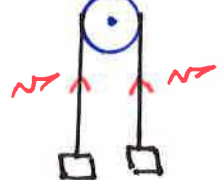
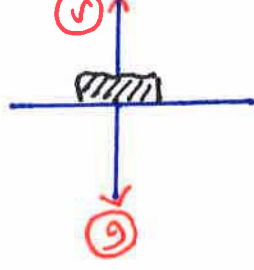
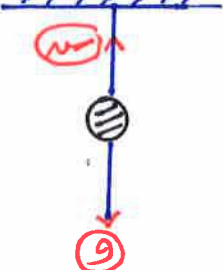
(أ) $\overrightarrow{أد}$ (ب) $\overrightarrow{دأ}$

(حـ) $\overrightarrow{أحـ}$ (د) $\overrightarrow{هـأ}$

أ/ السيد عبد الكريم

توازن القوى المستوية المتلاقية فى نقطة

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

* يتزن جسم جاسئ تحت تأثير قوتين فقط إذا كانت القوتان :-

① متساويتين فى المقدار ② متضادتين فى الاتجاه ③ خطا عملهما على استقامة واحدة

• أى إذا كانت $ق_١ = - ق_٢$ ولهما نفس خط العمل فإن الجسم يكون متزن وبالتالى :

$ق_١ + ق_٢ = ٠$ ، $ق_١ - ق_٢ = ٢ ق_١$

ملاحظات

① جسم معلق بحبل

ش = و

② جسم على نضد أفقى أملس

ر = و

③ خيط يمر على بكرة ملساء

ش = ش

④ خيط يمر فى حلقة ملساء

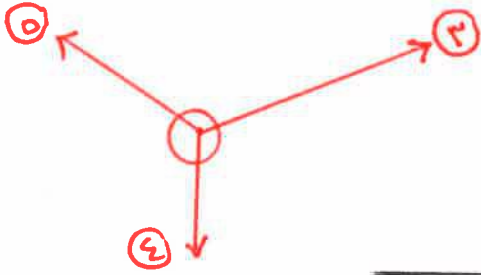
ش = ش

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة

* إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة فإن محصلة أى قوتين منهما تساوى القوة الثالثة فى المقدار ومضادة لها فى الاتجاه ولها نفس خط العمل

تدريب في الشكل المقابل ..

القوى (٣ ، ٥ ، ٤) نيوتن متزنة

أوجد قياس الزاوية بين القوتين ٣ ، ٥

الحل

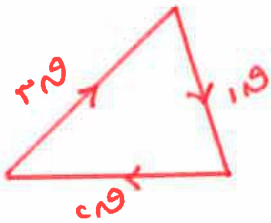
∵ القوى متزنة ∴ محصلة القوتين ٣ ، ٥ هي القوة ٤

∴ $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتا ى

$١٦ = ٩ + ٢٥ + ٢ × ٣ × ٥$ جتا ى ⟸ ى = ١١ َ ٥٢ ْ ١٢٦

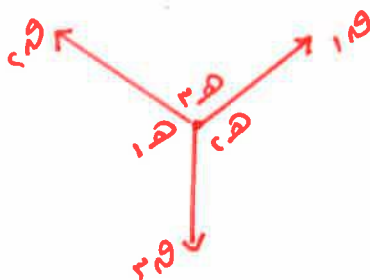
قاعدة ١

إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة في ترتيب دوري واحد فإن هذه القوى تكون متزنة

خد بالك

يجب أن تكون مقادير هذه القوى تصلح أطوال أضلاع مثلث

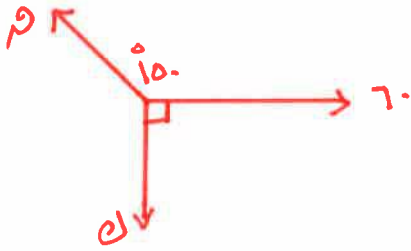
بمعنى : $ق_١ + ق_٢ > ق_٣$

قاعدة ٢ لامى

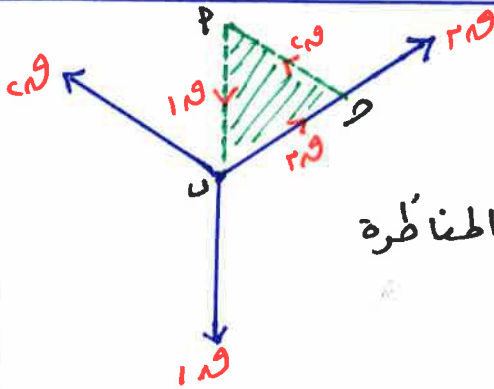
إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين

$$\frac{ق_١}{جاهـ_١} = \frac{ق_٢}{جاهـ_٢} = \frac{ق_٣}{جاهـ_٣}$$

تدريب في الشكل المقابل..

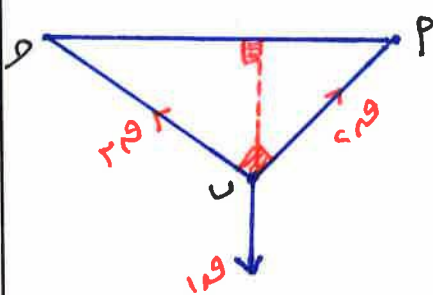
القوى (٦٠ ، ك ، ق) متزنة

أوجد قيمة ك ، ق

قاعدة مثلث القوى

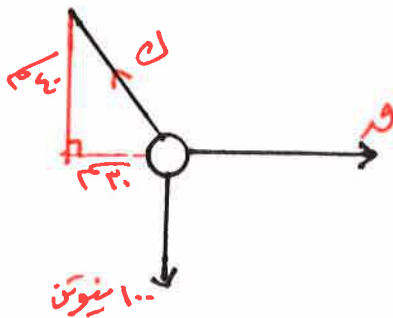
إذا رسم مثلث أطوال أضلاعه توازى خطوط عمل القوى فإن أطوال أضلاع المثلث تتناسب مع مقادير القوى المناظرة

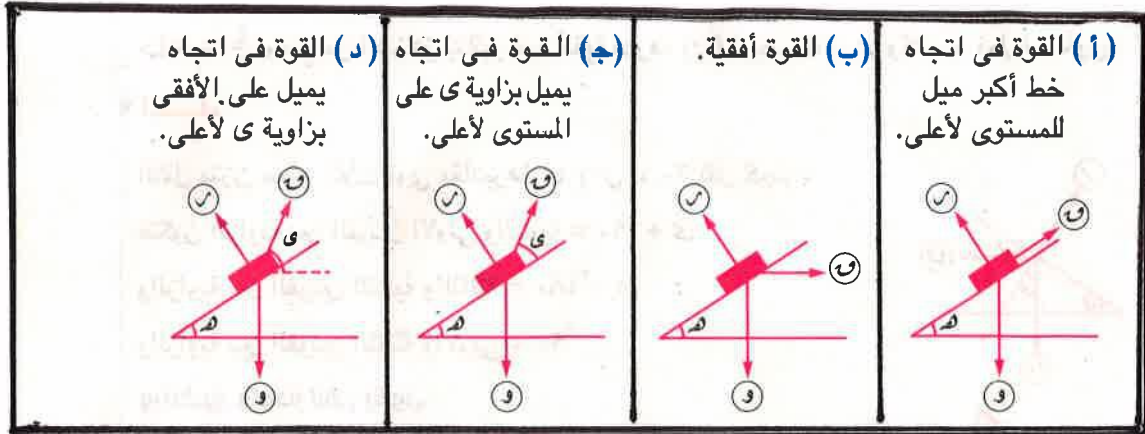
أى أن : $\frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{أجـ} = \frac{ق_3}{بجـ}$

ملحوظة

إذا رسم مثلث أضلاعه عمودية على اتجاهات القوى المتزنة فإن النسبة بين كل قوة وطول ضلع المثلث العمودى عليها تكون متساوية

$\frac{ق_1}{أجـ} = \frac{ق_2}{بجـ} = \frac{ق_3}{أب}$

تدريب في الشكل المقابل..

القوى (١٠٠ ، ق ، ك) متزنة

أوجد قيمة ك ، ق

اتزان جسم على مستو مائل أملس

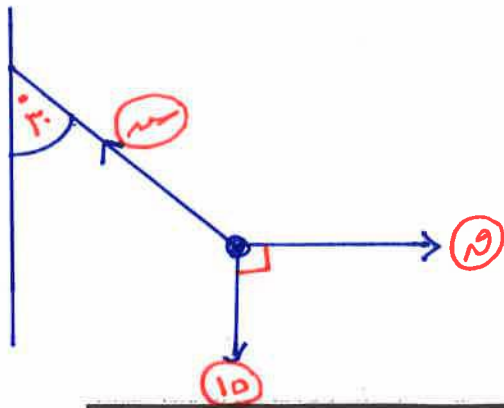
(أ) القوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى.	(ب) القوة أفقية.	(جـ) القوة فى اتجاه يميل بزاوية ى على المستوى لأعلى.	(د) القوة فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية ى لأعلى.

(١) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين.

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٢) أى مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنة ؟

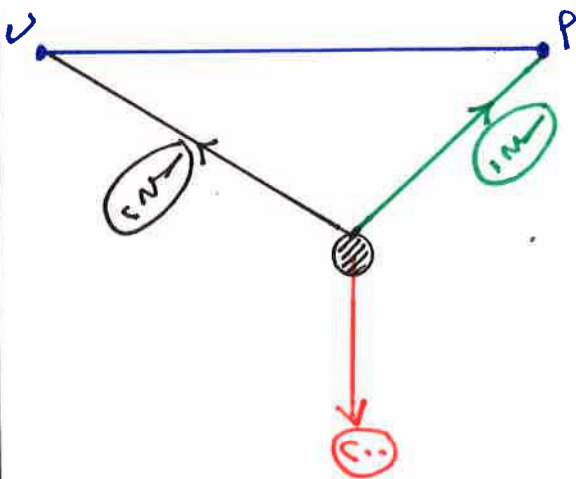
(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن

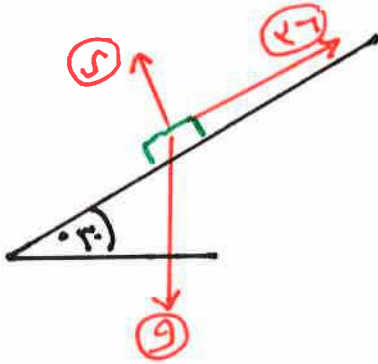
(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن

(٣) جسم وزنه ١٥ نيوتن معلق فى نهاية خيط مربوط فى حائط رأسى. شد الجسم بقوة أفقية فأصبح الخيط يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد فى وضع الاتزان مقدار القوة الأفقية والشد فى الخيط .

مثال ٤

علق ثقل مقداره ١٢ نيوتن فى أحد طرفى خيط طوله ١٣٠ سم والطرف الآخر للخيط مثبت فى نقطة على حائط رأسى . جذب الجسم بقوة أفقية حتى إتزن وهو على بعد ٥٠ سم من الحائط أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط

مثال ٥

علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى والبعد بينهما ١٠٠ سم أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين

مثال ٦

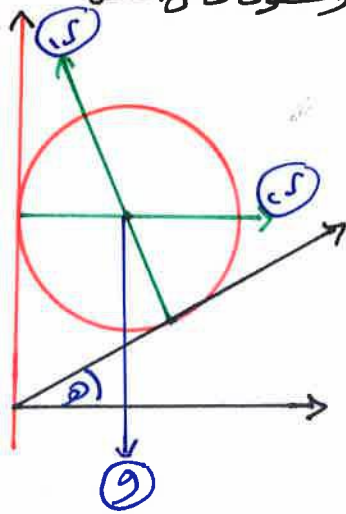
وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ورد فعل المستوى

مثال ٧

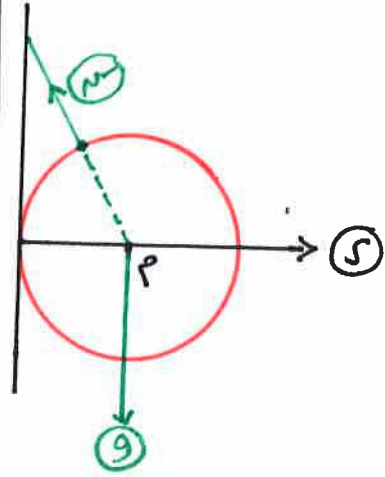
وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ وحفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها ٣√٢ نيوتن وتميل على خط أكبر ميل للمستوى بزاوية قياسها هـ لأعلى أوجد قيمة هـ ورد فعل المستوى

تابع الاتزان (تلاقى خطوط عمل ثلاث قوى متزنة)

إذا إتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة .

حالات إتزان الكرة

كرة معلقة بخيط على سطحها

كرة مرتكزه على قضيبين متوازيين

كرة مستقرة بين حائط راسى أملس ومستوى مائل أملس

مثال ٨

كرة ملساء طول نصف قطرها ٥ سم ووزنها ٦ نيوتن . ربطت من إحدى نقط سطحها بخيط طوله ٨ سم ومربوط طرفه الآخر من نقطة فى حائط رأسى أملس فاتزنت وهى مستندة على الحائط أوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل الحائط

تمارين

(١) ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية في نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° أوجد مقدار كل من: ق ، ك

[٣٠ ، ٣٠√٣]

(٢) علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن في أحد طرفي خيط خفيف مثبت طرفه الآخر في نقطة من حائط رأسى. أزيح الثقل بقوة في اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح الخيط في وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية ٣٠° أوجد مقدار القوة والشد في الخيط

[٨ ، ٨√٣]

(٣) علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويميل الخيط الآخر على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كان مقدار الشد في الخيط الاول يساوى ١٠٠ ث.جم أوجد هـ ومقدار الشد في الخيط الثانى.

[٦٠° ، ١٠٠√٣]

(٤) قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث.جم علق من طرفيه تعليقاً حراً بواسطة خيطين ثُبت طرفاهما في نقطة واحدة فإذا كان طولا الخيطين ٨٠ سم ، ٦٠ سم أوجد مقدار الشد في كل منهما.

[٩٠ ، ١٢٠]

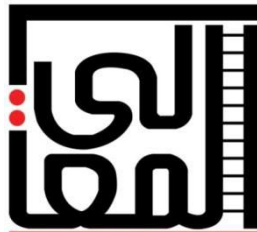
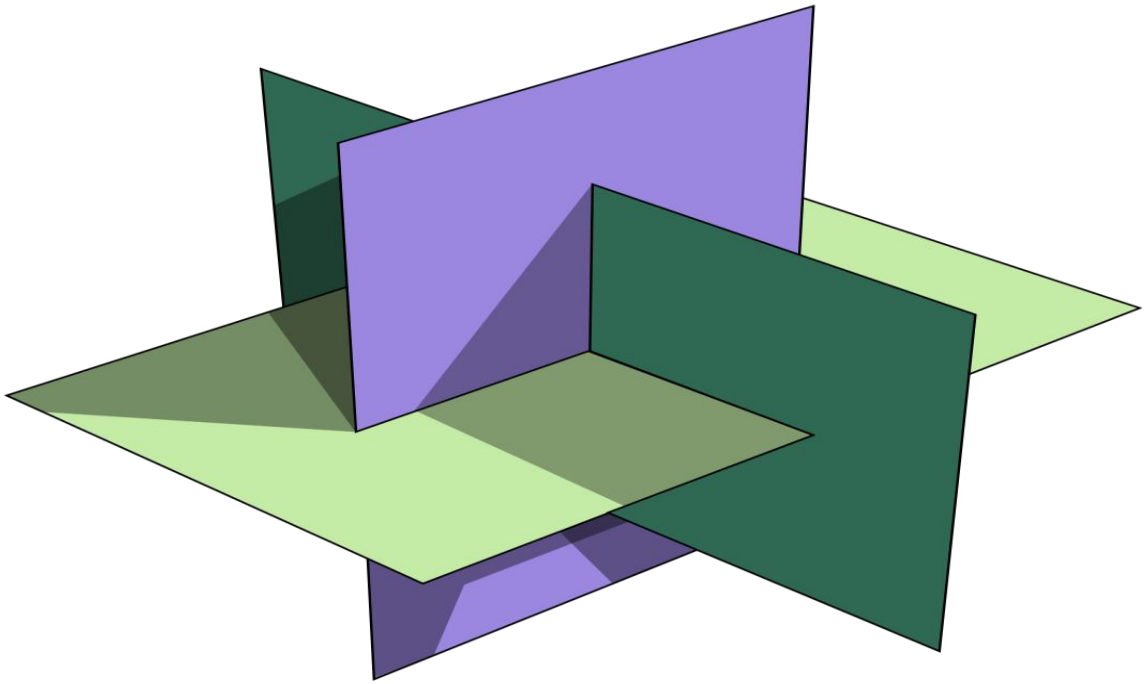
(٥) كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث.كجم تؤثر في مركزها ، موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسى والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠° أوجد رد فعل المستويين

[$\frac{٤٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٨٠٠\sqrt{٣}}{٣}$]

"إنتهت الاستاتيكا بحمد الله"

"كلنا نخطئ ونصيب"

أ/ السيد عبد الكريم

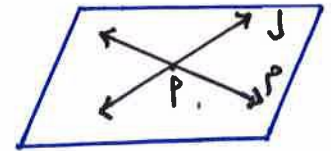
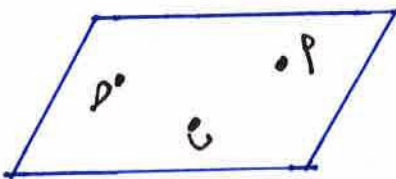
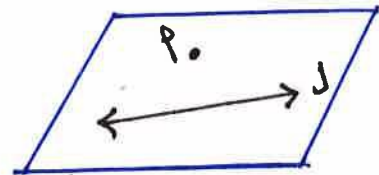
الهندسة

المستقيمات والمستويات فى الفراغ

الخط المستقيم هو مجموعة غير منتهية من النقط ويتحدد تحديداً تاماً إذا علم نقطتين

المستوى هو مجموعة غير منتهية من النقط تمثل سطح لا حدود له وينطبق عليه المستقيم بأى وضع . يرمز له بأحد الحروف الكبيرة س ، ص ، ع ، ...

تعيين المستوى فى الفراغ

١) مستقيمان متقاطعان

٢) مستقيمان متوازيان

٣) مستقيم ونقطة خارجة

٤) ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة

ملاحظات

١) أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لانهائى من المستقيمات

٢) أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لانهائى من المستويات

٣) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستقيم واحد فقط

٤) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما عدد لانهائى من المستويات

الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات فى الفراغ

١ موضع مستقيم بالنسبة لمستقيم فى الفراغ

المستقيمان المتقاطعان

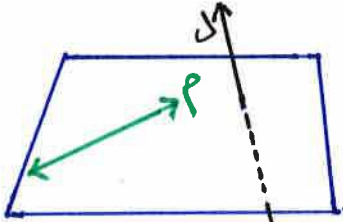
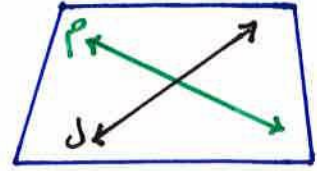
ل ∩ م = {أ}

∵ يجمعهما مستوى واحد

المستقيمان المتوازيان

ل // م ⇐ ل ∩ م = Φ

∵ يجمعهما مستوى واحد

المستقيمان المتخالفان

ل ، م متخالفان

لا يجمعهما مستوى واحد

٢ موضع مستوى بالنسبة لمستوى فى الفراغ

المستويان المتوازيان

المستوى س // المستوى ص

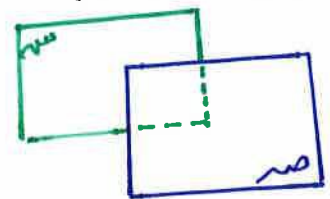
س ∩ ص = Φ

المستويان المتقاطعان

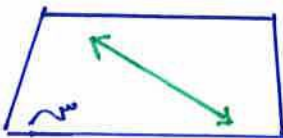
المستويان س ، ص متقاطعان

س ∩ ص = ل

المستويان المنطبقان

المستويان يشتركان فى جميع النقط س ∩ ص = أحدهما

٣ موضع مستقيم بالنسبة لمستوى فى الفراغ

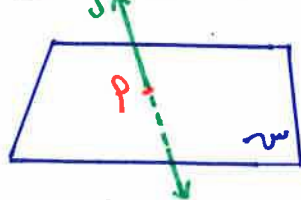
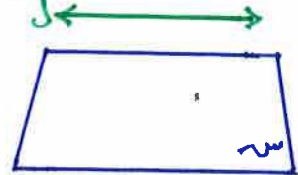
المستقيم يوازى المستوى

ل ∩ س = Φ

المستقيم قاطع للمستوى

ل ∩ س = {أ}

المستقيم موجود فى المستوى

ل ∩ س = ل

ا/ السيد عبد الكريم

ملاحظات

١) المستقيمان المتخالفان غير متوازيان / متقاطعان لأنه لا يجمعهما مستوى واحد

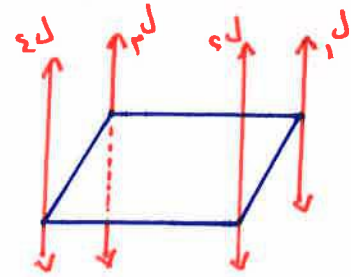
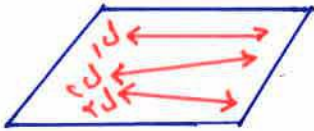
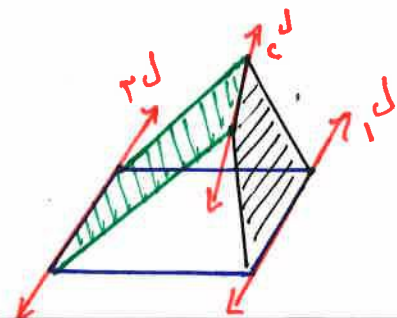
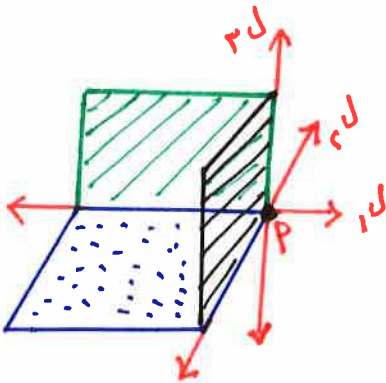
٢) إذا إشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة واحدة فإن المستقيم يقع داخل المستوى

٣) إذا إشترك مستويان مختلفان فى نقطة فإنهما يشتركان فى مستقيم يمر بهذه النقطة

٤) إذا إشترك مستويان فى ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة فإنهما ينطبقان

٥) المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ متوازيان

٦) المستقيمات الرأسية فى الفراغ كلها متوازية

لاحظ ليس بالضرورة أن تكون المستقيمات الافقية كلها متوازية

٦) إذا تقاطعت ثلاث مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمات تقاطعها إما تكون :
متوازية أو متقاطعة جميعاً فى نقطة واحدة

تمارين

١) إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن ل ∩ س = --

(أ) Φ (ب) ل (ج) س (د) {أ}

٢) إذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س ، أ ∈ س فإن ل ∩ س = --

(أ) Φ (ب) ل (ج) س (د) {أ}

٣) يكون المستويان متخالفان إذا كان --

(أ) غير متوازيان (ب) غير منطبقين (ج) لا يجمعهما مستوى واحد (د) يقعان فى مستوى واحد

٤) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستوى واحد (ج) رؤوس المثلث تعين مستوى

(ب) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين مستوى (د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد

٥) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا

(أ) مستقيم ونقطة لا تنتمى اليه (ب) مستقيمين متوازيين وغير منطبقين

(ج) مستقيمين متقاطعين (د) مستقيمين متخالفين

٦) ينطبق المستويان إذا إشتركا فى --

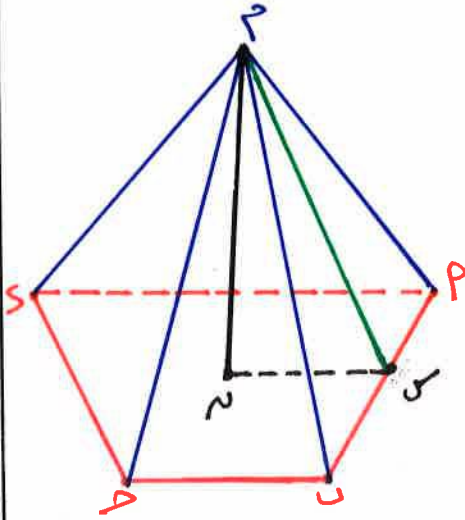
(أ) نقطة واحدة (ب) نقطتين

(ج) ثلاث نقط على استقامة واحدة (د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

٧) اذا كان المستقيمان ل١ ، ل٢ متخالفان فإن ل١ ∩ ل٢ = --

(أ) Φ (ب) ل١ (ج) ل٢ (د) المستوى الذى يجمع ل١ ، ل٢

الهرم

تعريف هو مجسم له قاعدة واحدة وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة ... ويسمى الهرم ثلاثياً أو رباعياً أو ... حسب أضلاع قاعدته

* فى الشكل المقابل..

م أ ب حـ ء هرم رباعى

* رأسه م
* قاعدته سطح المضلع أ ب حـ ء
* أحرفه الجانبية $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م حـ}$ ، $\overline{م ء}$
* أوجهه الجانبية سطوح المثلثات

م أ ب ، م ب حـ ، م حـ ء ، م أ ء

* ارتفاع الهرم هو بعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته $\overline{م ن}$

* الارتفاع الجانبى للهرم : هو بعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته : $\overline{م س}$

حالات خاصة من الهرم

(١) **الهرم القائم** يكون الهرم قائماً إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسى

ملحوظة * المركز الهندسى لمتوازى الأضلاع وحالاته الخاصة هو نقطة تلاقى القطرين

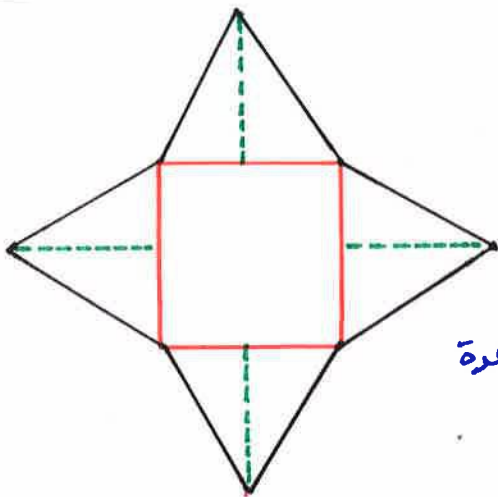
* المركز الهندسى للمثلث هو نقطة تلاقى متوسطاته

② **الهرم المنتظم** هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه هو موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليه

بمعنى أن : الهرم المنتظم هو هرم قائم قاعدته مضلع منتظم

ملحوظة المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متساوية فى الطول وزواياه متساوية فى القياس

*** خواص الهرم المنتظم**

① أحرفه الجانبية متساوية فى الطول
② إرتفاعاته الجانبية متساوية فى الطول
③ أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متطابقة متساوية الساقين

شبكة الهرم

شبكة الهرم الرباعى المنتظم

عدد أوجهه = ٥ ٤ جانبية + وجه القاعدة

عدد الأحرف = ٨ ٤ جانبية + ٤ قاعدة

عدد الرؤوس = ٥ رأس الهرم + ٤ رؤوس للقاعدة

① المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

② المساحة الكلية للهرم المنتظم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

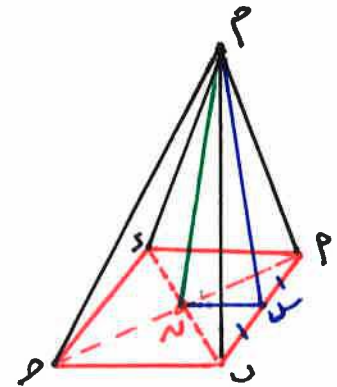
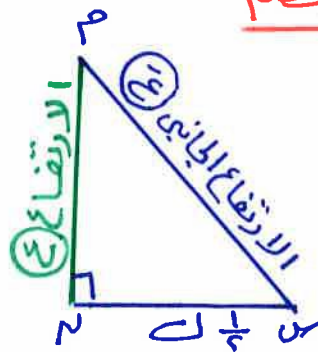
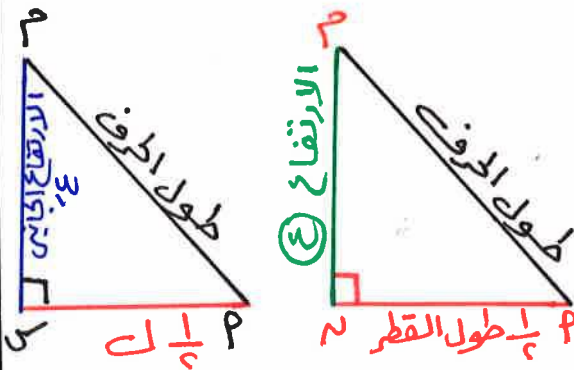
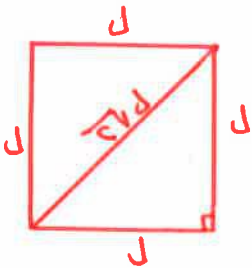
③ حجم الهرم المنتظم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

حالة خاصة: الهرم الثلاثى منتظم الوجوه الذى طول حرفه = ل ، ع ارتفاعه

① ٢ ل² = ٣ ع²

② المساحة الكلية = ل² $\sqrt{3}$

③ الحجم = $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ل³

ملحوظة: الهرم الرباعى المنتظم

* القاعدة: مربع طول ضلعه = ل

① طول قطره = ل $\sqrt{2}$

② محيطه = ٤ ل

③ مساحته = ل²

ل ل ل ل ل$\sqrt{2}$

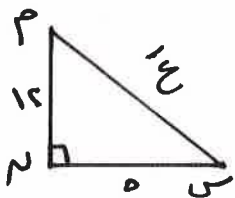
مثال ١: م أ ب جـ د هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

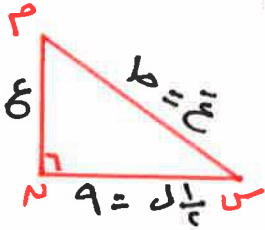
فإن ارتفاعه الجانبى = ...

الحل

(ع١)² = ٢٥ + ١٤٤

∴ ع١ = ١٣ سم

أ/ السيد عبد الكريم

مثال ٢ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم وارتفاعه الجانبي ١٥ سم

أوجد: (١) ارتفاع الهرم (٢) المساحة الكلية (٣) حجمه

الحل

(١) $ع = \sqrt{٢٢٥ - ٨١} = ١٢$ سم

القاعدة مربع

محيط القاعدة: $٤ \times ١٨ = ٧٢$ سم

مساحة القاعدة: $١٨ \times ١٨ = ٣٢٤$ سم^2

(٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$= \frac{1}{2} \times ٤ل \times ع' + ل^2$

$= \frac{1}{2} \times ٧٢ \times ١٥ + ٣٢٤ = ٨٦٤$ سم^2

(٣) حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{3} \times ٣٢٤ \times ١٢ = ١٢٩٦$ سم^3

مثال ٣ هرم رباعي منتظم ارتفاعه يساوي ٩ سم وحجمه ٣٠٠ سم^3 أوجد طول ضلع قاعدته

الحل

$\therefore ح = \frac{1}{3} \times ل^2 \times ع$

$\therefore ٣٠٠ = \frac{1}{3} ل^2 \times ٩$

$\therefore ل^2 = ١٠٠$ سم^2

$\therefore ل = ١٠$ سم

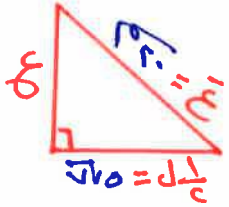
مثال ٤ هرم رباعي منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠ سم² وارتفاعه الجانبي ٢٠ سم أوجد حجمه.

الحل

∵ مساحة القاعدة = ل²

∴ ٧٠٠ = ل² ⟸ ل = ١٠√٧ سم

∵ ع = √((٢٠)² − (٥√٧)²) = ١٥ سم

∵ ح = ١/٣ ل² × ع

= ١/٣ × ٧٠٠ × ١٥ = ٣٥٠٠ سم³

مثال ٥ هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه = ١٢ سم أوجد :-

(١) ارتفاعه (٢) مساحته الكلية (٣) حجمه

الحل

∵ الهرم ثلاثي منتظم الوجوه

∴ ٢ ل² = ٣ ع²

∴ ٢ × (١٢)² = ٣ ع² ⟸ ع = ٤√٦ سم

المساحة الكلية = √٣ ل²

= √٣ × (١٢)² = ١٤٤√٣ سم²

الحجم = √٢/١٢ ل³ = √٢/١٢ × (١٢)³ = ١٤٤√٢ سم³

ملحوظة مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ن وطول ضلعه س

= ن/٤ × س² × ظتا (١٨٠°/ن)

تمارين

١) إذا كان حجم هرم رباعي منتظم ١٢ سم³ وارتفاعه ٤ سم فإن طول حرف قاعدته = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٢) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبي ١٣ سم فإن حجمه = ... سم³

(أ) $13 \times (10)^2 \times \frac{1}{3}$ (ب) $12 \times (10)^2 \times \frac{1}{3}$ (جـ) $13 \times (12)^2 \times \frac{1}{3}$ (د) $10 \times (13)^2 \times \frac{1}{3}$

٣) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الوجوه = ١٨ سم فإن مساحته الكلية = ... سم²

(أ) $\frac{27\sqrt{2}}{4}$ (ب) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (جـ) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ (د) $9\sqrt{3}$

٤) النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه الى مساحته الكلية =

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

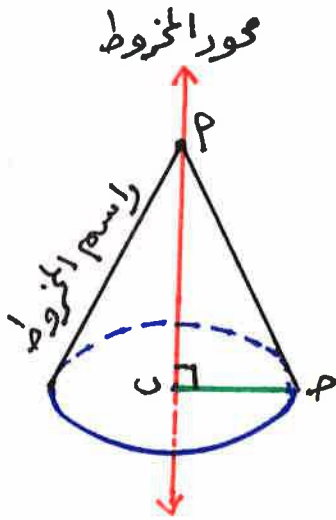
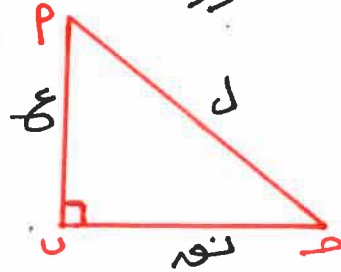
---

٥) هرم الجيزة الاكبر (خوفو) هو هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترا وارتفاعه الجانبي ١٨٦ مترا أوجد ارتفاع الهرم [١٤٥,٤ متر]

٦) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه $10\sqrt{3}$ سم أوجد المساحة الجانبية - حجم الهرم [٨٠٠ ، $\frac{4000}{3}\sqrt{3}$]

٧) م أ ب جـ د هرم رباعي قائم قاعدته أ ب جـ د مربع طول ضلعه $8\sqrt{2}$ سم وطول حرفه الجانبي $4\sqrt{6}$ سم أوجد: مساحته الجانبية - حجمه [$128\sqrt{2}$ ، $\frac{512}{3}\sqrt{2}$]

٨) هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبي $10\sqrt{3}$ أوجد: المساحة الجانبية - المساحة الكلية [$360\sqrt{3}$ ، $576\sqrt{3}$]

المخروط الدائري القائم

هو الجسم الذي ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة كمحور

الارتفاع = ع

نصف قطر القاعدة = نق

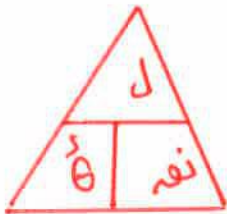
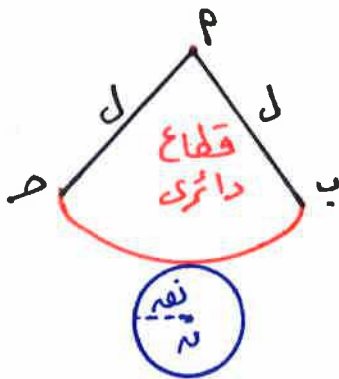
راسم المخروط = ل

القاعدة : دائرة
- محيطها = ٢ π نق
- مساحتها = π نق²

* شبكة المخروط القائم

(١) أ ب = أ جـ = ل

(٢) قاعدة المخروط : هي سطح الدائرة ن

(٣) السطح الجانبي للمخروط : هو القطاع الدائري أ ب جـ

تذكر أن

(١) محيط القطاع الدائري = ٢نق + ل

(٢) مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق

= $\frac{1}{2}$ θ نق²

= $\frac{س^\circ}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة

(١) المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × طول الراسم

= $\frac{1}{2}$ × ٢ π نق × ل = π نق ل

٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

٣) حجمه = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال ١: مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم أوجد حجمه

الحل

نق = $\sqrt{(١٧)^٢ - (١٥)^٢}$ = ٨ سم

ل = ١٧ ، ع = ١٥ ، نق =

ح = $\frac{١}{٣}$ ط نق^٢ × ع

= $\frac{١}{٣}$ ط × ٦٤ × ١٥ = ٣٢٠ ط سم^٣

مثال ٢: أوجد المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر دائرته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم

الحل

ل^٢ = ع^٢ + نق^٢

∴ ل = $\sqrt{٤٠٠ + ٢٢٥}$ = ٢٥ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × طول الراسم

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ ط × ١٥ × ٢٥ = ٣٧٥ ط سم^٢

حجم المخروط القائم = $\frac{١}{٣}$ ط نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ ط × ٢٢٥ × ٢٠ = ١٥٠٠ ط سم^٣

مثال ٣: مخروط دائرى قائم مساحة قاعدته ٢٥ ط سم^٢ وطول راسمه ١٣ سم

أوجد: مساحته الكلية وحجمه .

تمارين

(١) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم = ... سم

○ ٦٠ π ○ ٣٨ π ○ ١٠ π ○ ٤٨ π

(٢) مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية = ..

○ ٤ π نق² ○ ٣ π نق² ○ ٣ π نق² ○ ٤ π نق²

(٣) حجم مخروط قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ١٥ سم = ... سم³

○ ٧٧ ○ ١٠٥ ○ ١١٠ ○ ٧٧٠

(٤) إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها نق يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع فإن :

○ ع = $\frac{٤}{٣}$ نق ○ ع = ٢ نق ○ ع = ٢ نق² ○ ع = ٤ نق

(٥) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية ٩٠ π سم² فإن حجمه = ... سم³

○ ١٠٥ π ○ ٩٥ π ○ ١٠٠ π ○ ١٢٠ π

(٦) أوجد بدلالة π محيط ومساحة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم

[٢٠ π ، ١٠٠ π]

(٧) أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم² وطول راسمه ٣٠ سم

[١٤]

(٨) مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحُول إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤٢ سم أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

[٥٧٨]

ا/ السيد عبد الكريم

الدائـرة

* هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على بعد ثابت من نقطة ثابتة فى المستوى

معادلة الدائـرة

إحداثى المركز م = (د ، هـ) — طول نصف القطر = نق

١) الصورة القياسية : $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

٢) الصورة العامة : $س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + حـ = صفر$

ملاحظات

١) معادلة الدائـرة التى مركزها نقطة الأصل : $س^2 + ص^2 = نق^2$

٢) تتطابق الدائـرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما

٣) موضع النقطة $(س_١ ، ص_١)$ بالنسبة للدائرة إذا كان :-

$(س_١ - د)^2 + (ص_١ - هـ)^2$

- $= نق^2$ ∴ النقطة تقع على الدائرة
- $> نق^2$ ∴ النقطة خارج الدائرة
- $< نق^2$ ∴ النقطة داخل الدائـرة

٤) مركز الدائرة م = $(\frac{-١}{٢}$ معامل س ، $\frac{-١}{٢}$ معامل ص$)$ = $(-ل ، -ك)$

، $نق = \sqrt{ل^2 + ك^2 - حـ}$

٥) الشروط التى يجب توافرها حتى تكون: $س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + حـ = ٠$ هى :

(i) معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

(ii) $ل^٢ + ك^٢ - حـ > صفر$

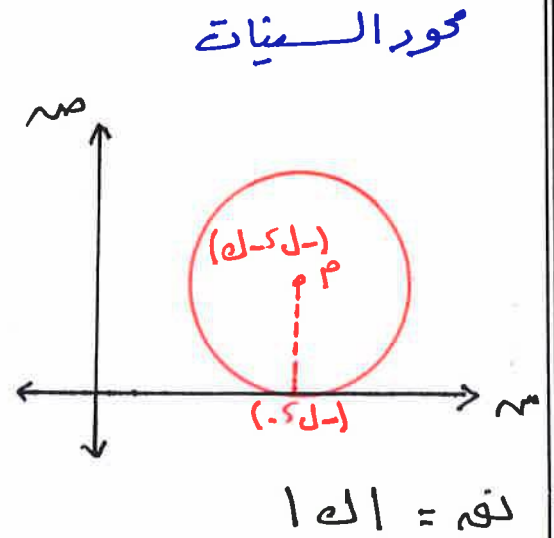
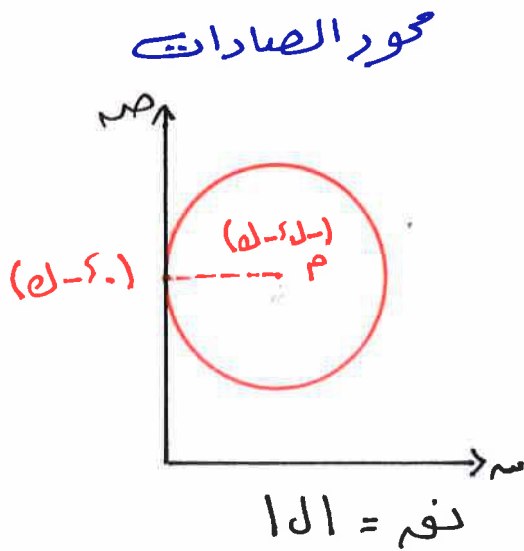
(iii) لا يوجد حد يحتوى على س ص

٦) معادلة الدائرة التى تمس :-

محور السينات

نق = | ك |

محور الصادات

نق = | ل |

٧) الدائرة التى تمس المحورين يكون نق = | ل | = | ك |

تذكر أن

١) النقطة التى ∈ محور السينات (ل ، ٠)

٢) النقطة التى ∈ محور الصادات (٠ ، ك)

٣) إحداثى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

٤) البعد بين النقطتين أب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

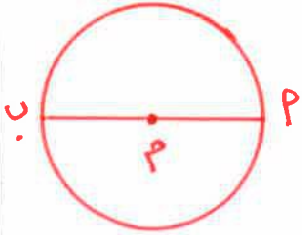
٥) أى نقطة ∈ للدائرة تحقق معادلتها

مثال ١ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٥ ، ٢) وطول نصف قطرها ٦ وحدات

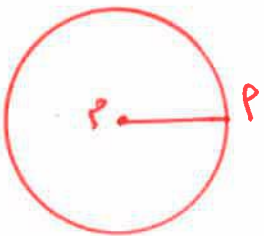
الحل

مثال ٢ أوجد معادلة الدائرة التى قطرها أب حيث أ (٢ ، -٧) ، ب (٦ ، ٥)

الحل

ب — م — أ

مثال ٣ أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، -٢) وتمر بالنقطة أ (-١ ، ١)

الحل

م — أ

مثال ٤ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، -٤) وتمس محور السينات

الحل

مثال ٥ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٣ ، -٤) وتمس محور الصادات

الحل

مثال ٦ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (-٤ ، ٤) وتمس المحورين .

الحل

مثال ٧ أى المعادلات التالية تمثل دائرة ؟ وإذا كانت دائرة أوجد احداثى مركزها وطول نصف قطرها

(١) ٣س^٢ + ٢ص^٢ + ٦س − ٨ص − ١٠ = ٠

(٢) س^٢ + ص^٢ + ٤س + ٢٥ = ٠

(٣) ٢س^٢ + ٢ص^٢ − ١٢س + ٨ص − ٣٠ = ٠

الحل

تمارين

١) الدائرة $س^2 + ص^2 = ٢٥$ مركزها النقطة (٠، ٠) وتمر بالنقطة

أ) (١١، ٤) ب) (٥، ٠) ج) (٢٥، ٠) د) (٥، ١)

٢) معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٣، -٥) وطول نصف قطرها ٧ وحدات هى ..

أ) $(س-٣)^2 + (ص-٥)^2 = ٤٩$ ب) $(س+٣)^2 + (ص+٥)^2 = ٤٩$

ج) $(س+٣)^2 + (ص-٥)^2 = ٤٩$ د) $(س-٣)^2 + (ص+٥)^2 = ٤٩$

٣) النقطة التى تقع على الدائرة $(س-٢)^2 + ص^2 = ١٣$ هى --

أ) (٢، ٣) ب) (٣، -٢) ج) (٢، ٥) د) (٤، ٣)

٤) محيط الدائرة التى معادلتها $س^2 + ص^2 = ٨$ هى --

أ) ٨π ب) ١٦π ج) $٢\sqrt{٢}\pi$ د) $٤\sqrt{٢}\pi$

٥) الدائرة $(س+٢)^2 + ص^2 + ٢ص = ٠$ مركزها النقطة

أ) (٢، ٢) ب) (-٢، -١) ج) (٢، -١) د) (-٢، ٠)

٦) إذا كانت المعادلة $٢س^2 + أص^2 + ب س ص - ٥ = ٠$ تمثل دائرة فإن مساحتها...

أ) ٥π ب) $\sqrt{٥}\pi$ ج) $\frac{٥}{٢}\pi$ د) $٥\sqrt{٢}\pi$

٧) أوجد معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة $س^2 + ص^2 - ١٢س + ١٦ص + ٢٠ = ٠$ بانتقال (س+٢ ، ص-٢)

٨) أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٢، -٣) وتمس المستقيم الذى معادلته $٣س - ٤ص + ٢ = $ صفر

"وماتوفيقى إلا بالله" "إنتظروا المراجعة النهائية"